3/ ♣ $\forall x \in]0,2[; f_0'(x) = \dfrac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

D'où le tableau de variation de f_0.

x	0		1		2
$f_0'(x)$		+	0	−	
$f_0(x)$	0	↗	1	↘	0

☒ $\forall n \geq 1; \forall x \in]0,2[; f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{2x-x^2} + x^n \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$= x^n \frac{-(n+1)x + 2n + 1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$\Rightarrow \text{sig}(f_n'(x)) = \text{sig}(-(n+1)x + 2n + 1); \forall x \in]0,2[$

D'où le tableau de variation de f_n.

x	0		u_n		2
$f_n'(x)$	0	+	0	−	
$f_n(x)$	0	↗	v_n	↘	0

avec $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ et $v_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^n \sqrt{2\dfrac{2n+1}{n+1} - \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^2} = \dfrac{(2n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1}}$

D'après le tableau de variation de f_n on a $v_n = f(u_n)$ est le maximum absolu de f_n.

Aussi le tableau de variation de f_0 prouve que $v_1 = 1 = f_0(1)$ et le maximum absolu de f_0.

4/a- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = 2.$

b- $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log}(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log}\left[\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times (n+1)^{\frac{-1}{2}}\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\text{Log}(n+1)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[(n+1)\left[\left(\frac{n+1/2}{n+1}\right)\text{Log}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\text{Log}(n+1)}{(n+1)}\right]\right]$$